南 华 大 学 2021-2022 学 年 第 二 学 期

高等数学 A2 课程试卷(A 卷，2021 级理工科各专业)

考试日期：2022 年 6 月 22 日　　考试类别：考试　　考试时间：100 分钟

得分	
阅卷人	

一、**填空题**：（每空 4 分，共 6 小题，共 24 分）

1.设$\vec{a}=(1,-2,4),\left|\vec{a}\right|=(\sqrt{21})$.

2. 已知$z=xe^{xy}$,则$dz=(xy+1)e^{xy}dx+x^2e^{xy}dy$

3.已知积分区域$D:1\le x^2+y^2\le 4,\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy=\frac{15\pi}{2}$

4. 平面$\pi:2x+y-z=1$与直线$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{1}$的夹角为:$\arcsin\frac{1}{6}$

5.已知L为圆周$x^2+y^2=a^2$，则$\int_L\sqrt{x^2+y^2}ds=2\pi a^2$

6. 函数$z=x^2+y^2$在点$(1,2)$处沿点$(1,2)$到$(2,2-\sqrt{3})$的方向的方向导数是:$1-2\sqrt{3}$

得分	
阅卷人	

二、**单项选择题**：（每题 4 分，共 7 小题 ，共 28 分）

7. 函数$z=3(x+y)-x^3-y^3$的极大值点是:(A).

$A.(1,1)$;　$B.(1,-1)$;　$C.(-1,1)$;　$D.(-1,-1)$

8.$\left|\vec{a}\right|=2,\left|\vec{b}\right|=3,\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{19}$,$\vec{a}$、$\vec{b}$夹角为(C)

$A.\frac{\pi}{6}$,　$B.\frac{1}{2}$,　$C.\frac{\pi}{3}$,　$D.\frac{2\pi}{3}$。

9. 已知曲面Σ为$x^2+y^2+z^2=a^2$,则$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)ds=$(D)

$A.\,2\pi a^2$; $B.\,2\pi a^4$; $C.\,4\pi a^2$; $D.\,4\pi a^4$

10. 极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=$(B)

$A.0$; $B.$不存在; $C.\dfrac{1}{2}$; $D.$存在但不等于0和$\dfrac{1}{2}$

11.下列级数中，收敛的是(A)

$A.-\dfrac{8}{9}+\dfrac{8^2}{9^2}-\dfrac{8^3}{9^3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{8^n}{9^n}+\cdots$; $B.1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+4}+\cdots+\dfrac{1}{1+2(n-1)}+\cdots$;

$C.\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\cdots+\dfrac{1}{2n}+\cdots$; $D.\dfrac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\cdots$

12. 旋转曲面$x^2-y^2-z^2=1$是(A)

$A.xoy$平面上的双曲线绕x轴旋转所得

$B.xoz$平面上的双曲线绕z轴旋转所得

$C.xoy$平面上的椭圆绕x轴旋转所得

$D.xoz$平面上的椭圆绕x轴旋转所得

13.设直线方程为:$\begin{cases}x-y+z=1\\2x+y+z=4\end{cases}$**则参数方程为:(** C**)**

$(A)\begin{cases}x=1-2t\\y=1-t\\z=1+3t\end{cases}$; $(B)\begin{cases}x=1-2t\\y=-1+t\\z=1+3t\end{cases}$; $(C)\begin{cases}x=1-2t\\y=1+t\\z=1+3t\end{cases}$; $(D)\begin{cases}x=1-2t\\y=-1-t\\z=1+3t\end{cases}$

得分	
阅卷人	

三、**计算题**（每题 8 分，共 6 小题，共 48 分）

14.设椭圆 $x^2+2y^2+3z^2=12$ 上点 $(1,2,-1)$ 处的切平面为 π，求原点到平面 π 的距离。

解：令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-12$

$F_x=2x;F_y=4y;F_z=6z$，所以可取 $\vec{n}=(2,8,-6)$

切平面方程: $2(x-1)+8(y-2)-6(z+1)=0$

或者化简后得 $2x+8y-6z-24=0\Rightarrow x+4y-3z-12=0$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{12}{\sqrt{26}}$$

15.计算 $\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}d\sigma$，其中 D 是由 $y=x, x=1$ 和 $y=0$ 围成的区域。

解：　画出区域

写出区域 $0\le x\le 1,\ 0\le y\le x$,

$$\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}d\sigma=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{\sin x}{x}dy$$

$$=\int_0^1 \sin x dx=1-\cos 1$$

16. 已知 $I=\int_L (x+y^2)dx+(y^2+2xy)dy$, L 为抛物线 $y=x^2$ 上对应 x 从 -1 增加到 1 的那一段弧, 求 I

解：方法1：参数方程 $\begin{cases} x=x \\ y=x^2 \end{cases}$, x 从 -1 到 1

$$I=\int_{-1}^1 [(x+x^4)+(x^4+2x^3)2x]dx$$

$$=\int_{-1}^1 5x^4 dx=2$$

方法2:

$P=x+y^2;Q=y^2+2xy;\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2y$, 曲线积分与路径无关

取 $y=1$ 的路径为 L_0, $I=\int_{L_0}(x+y^2)dx+(y^2+2xy)dy=\int_{-1}^1 (x+1)dx=2$

17. 求函数 $z=xy$ 在条件 $x^2+2y^2=1$ 时的最大值(注意：用不等式求解不得分)。

解：方法1：令 $L(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x^2+2y^2-1)$

求偏导: $\begin{cases} L_x=y+2\lambda x \\ L_y=x+4\lambda y \\ L_\lambda=x^2+2y^2-1 \end{cases}$，令 $\begin{cases} L_x=y+2\lambda x=0 \\ L_y=x+4\lambda y=0 \\ L_\lambda=x^2+2y^2-1=0 \end{cases}$

解得 $x^2=2y^2=\frac{1}{2}$，驻点 $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{2})$ （四个驻点）;

当 $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2});(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2})$ 时, $z_{最大}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

方法2：令 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \end{cases} \Rightarrow z=xy=\frac{\sin 2t}{2\sqrt{2}}; z_{最大}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

18.计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^3+z)dydz+(y^3+x)dzdx+(z^3+y)dxdy$, 其中：

Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=1$ 所截的有限部分的外侧。

解：$P=x^3+z;Q=y^3+x;R=z^3+y$

补上 $\Sigma_0:z=1$，$x^2+y^2\le 1$，上侧，则 $\Sigma+\Sigma_0$ 为闭曲面，外侧，设 $\Sigma+\Sigma_0$ 围成 Ω

由高斯公式: $\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}(x^3+z)dydz+(y^3+x)dzdx+(z^3+y)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)dv$

$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^1(r^2+z^2)dz=\frac{9\pi}{10}$

Σ_0 上 $z=1,dz=0$, 所以 $\iint\limits_{\Sigma_0}(x^3+z)dydz+(y^3+x)dzdx+(z^3+y)dxdy=+\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(1+y)dxdy=\pi$

综上, $\iint\limits_{\Sigma}(x^3+z)dydz+(y^3+x)dzdx+(z^3+y)dxdy=\frac{9\pi}{10}-\pi=-\frac{\pi}{10}$

19. 将函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$展开为$x-2$的幂级数。

解：$f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$

$=\dfrac{1}{(x-2)+3}-\dfrac{1}{(x-2)+4}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+\dfrac{x-2}{3}}-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1+\dfrac{x-2}{4}}$

$=\dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{x-2}{3})^n-\dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{x-2}{4})^n;\left|\dfrac{x-2}{3}\right|<1$且$\left|\dfrac{x-2}{4}\right|<1$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{1}{3^{n+1}}-\dfrac{1}{4^{n+1}})(x-2)^n;(-1<x<5)$