

南华大学 2017-2018 学年度第一学期

《高等数学 A1》课程试卷参考答案与评分细则 (A 卷)

一. 填空题(每小题 4 分, 共 20 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} - x \sin \frac{2}{x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 设函数 $f(x) = x^2 - 1$, 则 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上满足罗尔定理的点 $\xi = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 曲线 $y = \frac{2x}{x-1}$, 则该曲线的铅直渐近线为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设 $f(x) = \int_0^x \sin t^2 dt$, 则 $f'(x^2) = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. $\int_{-1}^1 (\sqrt{1-x^2} + x \cos x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

二. 选择题(每小题 3 分, 共 21 分)

1. 反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\quad)$

A. -1 B. 0 C. 1 D. ∞

2. 设数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则下列结论不正确的是 $\underline{\hspace{2cm}} \quad (\quad)$

A. $\{x_n\}$ 单调 B. $\{x_n\}$ 有界 C. $\{x_{2n}\}$ 收敛 D. $\{-x_n\}$ 收敛

3. 曲线 $y = x^4 - 2x^2$ 的拐点的个数为 $\underline{\hspace{2cm}} \quad (\quad)$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

4. 函数 $y = \frac{1}{2x} \ (x > 0)$ 的一个原函数为 $\underline{\hspace{2cm}} \quad (\quad)$

A. $\ln 2x$ B. $\ln(2+x)$ C. $\ln x^2$ D. $\ln \sqrt{3x}$

5. 设函数 $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^4 - x^2}$, 则函数 $f(x)$ 的可去间断点为 $x = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\quad)$

A. -1 B. 0 C. 1 D. ± 1

6. 设 y_1 与 y_2 是方程 $y' + 2xy = x^2$ 的解, 则以 $y_1 + y_2$ 为解的方程是 $\underline{\hspace{2cm}} \quad (\quad)$

A. $y' + 2xy = 0$ B. $y' - 2xy = 0$ C. $y' - 2xy = 2x^2$ D. $y' + 2xy = 2x^2$

7. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ ax+b, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 其中 a, b 为常数, 则 $\underline{\hspace{2cm}} \quad (\quad)$

A. $a=0, b=0$ B. $a=0, b=1$ C. $a=1, b=0$ D. $a=1, b=1$

三. 计算题 (每小题 6 分, 共 18 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{\ln(1+x)}.$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x \sin x} \right).$

3. 函数 $y = f(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = e^t + t, \\ \ln(t^2 + y^2) = 2 \arctan \frac{y}{t} \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}.$

四. 解答题 (每小题 6 分, 共 36 分)

1. 求不定积分 $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 1, \\ x^2, & x < 1 \end{cases}$, 求 $\int_1^3 f(x-1)dx$.

3. 解微分方程 $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$.

4. 解微分方程 $y'' - 2y' + y = e^x$.

5. 设平面图形由 $y = e^x$, $x = 1$, x 轴与 y 轴所围, 求此平面图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

6. 设 $a > 1$, $f(x) = e^x \ln a - ax$ 的驻点为 $x(a)$, 当 a 为何值时, 驻点 $x(a)$ 最小?

五. 证明题(5 分)

设 $0 < a < x$, 证明 $\frac{\ln x - \ln a}{x - a} > \frac{2a}{x^2 + a^2}$.