

南华大学《高等数学》 2019-2020学年第一学期期末试卷A

班级号_____ 学号_____ 姓名_____

课程名称 《高等数学》(A类A卷) 成绩_____

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
满 分	15	15	8	34	10	10	8	100
得 分								

一、单项选择题（每题有且只有一个正确的选项）（每小题 3 分，共 15 分）：

1. 已知 $x=0$ 是 $f(x)=\frac{x+b\ln(1+x)}{ax-\sin x}$ 的可去间断点，则 a, b 的取值范围是（ ）

- (A) $b=-1$, a 为任意实数; (B) $b \neq -1$, a 为任意实数;
(C) $a=1$, b 为任意实数; (D) $a \neq 1$, b 为任意实数。

2. 下列反常积分中，收敛的是（ ）

- (A) $\int_1^{+\infty} \sin x dx$; (B) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$; (C) $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$; (D) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ 。

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ 上二阶可导，且 $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ 。

下列函数中，在区间 $[-a, a]$ 上恒正、单调递减且为下凸函数的是（ ）

- (A) $\frac{1}{f(x)}$; (B) $\frac{1}{f(-x)}$; (C) $-f(x)$; (D) $f(-x)$ 。

4. 积分 $\int_0^\pi |\sin(4x+1)| dx =$ （ ）

- (A) $\frac{1}{2}$; (B) $\frac{1}{4}$; (C) 2; (D) 4。

5. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续， $g(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$ 。对于两个命题：

①若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)=\int_0^x f(t)g(t)dt$ 为奇函数；

②若 $f(x)$ 为单调递增函数，则 $G(x)=\int_0^x (f(x)-f(t))g(t)dt$ 存在极小值。

下列选项正确的是（ ）

- (A) ①与②均正确; (B) ①与②均错误;
(C) 仅①正确; (D) 仅②正确。

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 设 $f(x) = xe^x$ ，则曲线 $y = f(x)$ 的拐点是：_____。
7. 直线 $L_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+3}{1}$ 和 $L_2: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}$ 的夹角为：_____。
8. 设函数 $f(x) = \arctan x$ ，常数 $a > 0$ 。若 $f(a) - f(0) = f'(\xi)a$ ，则 $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\xi^2}{a^2} =$ _____。
9. 极坐标曲线 $r = 2 \cos 3\theta$ 上对应于 $\theta = \frac{5\pi}{6}$ 的点处的切线方程为：_____。
10. 一阶常微分方程 $y'(x) = \frac{y}{x+y^2}$ 的通解为：_____。

三、（本大题共 8 分）

11. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $y^3 - 2x \int_0^y \sin^2 t dt = x + \pi^3$ 所确定的可导函数，求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ 。

四、计算题（第 12、13、14 小题每小题 8 分，第 15 小题 10 分，共 34 分）

12. 已知 $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x > 2 \\ x\sqrt{4-x^2}, & -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$ ，求 $\int_0^1 f(e^x) dx$ 。
13. 计算广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \arccos \frac{1}{x} dx$ 。
14. 求微分方程 $y'' + 6y' + 8y = e^{-2x}$ 的通解。
15. 设平面区域 D 由曲线 $C_1: y = \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ 、直线 $x = \pi$ 、 x 轴和 y 轴所围成，求 D 分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

五、几何题（本题 10 分）

16. 求直线 $L_1: \begin{cases} x+2y-3z=2, \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$ 在平面 $z=1$ 上的投影直线 L ，且求点 $M_0(1,2,1)$ 到直线 L 的距离 d 。

六、计算题（本题 10 分）

17. 求函数 $f(x) = \int_{-1}^1 |x-t| e^{t^2} dt$ 的最小值。

七、证明题（本题 8 分）

18. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，且 $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$\int_x^{x+\pi} \cos f(t) dt = \int_0^\pi \cos f(t) dt, \quad \int_x^{x+\pi} \sin f(t) dt = \int_0^\pi \sin f(t) dt.$$

(1) 证明：存在整数 k ，使得 $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $f(x+\pi) = f(x) + k\pi$ ；

(2) 若 $f(x)$ 是周期函数，证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^{n\pi} f(x) \cos x dx = 0$ 。