

警 示

根据《南华大学全日制普通高等教育学分制学士学位授予实施细则》第五条第三款规定，学生在校期间考试舞弊者不能授予学位。

南 华 大 学 2019 年 秋 季 学 期 （ 期 末 ）

高等数学 A1 课程试卷(2019 级理工科各专业)(A 卷)

考试日期：2020 年 1 月 2 日

考试类别：考试

考试时间：100 分钟

题号	一	二	三		总分	统分签字
得分						

得分	
阅卷人	

一、单项选择题：（每空 4 分，共 7 小题 28 分）

1、使函数 $f(x) = \sqrt[3]{x^2(1-x^2)}$ 适合罗尔定理条件的区间为 (A) .

- A. $[0,1]$ B. $[-1,1]$ C. $[-2,2]$ D. $[-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}]$

2、设 $I = \int \frac{1}{x^4} dx$ ，则 $I =$ (B)

- A. $-4x^{-5} + C$ B. $-\frac{1}{3x^3} + C$ C. $-\frac{1}{3}x^3 + C$ D. $\frac{1}{3}x^{-3} + C$

3、设 $y = \tan x - \ln x \cdot \cos x$ ，则 $y' =$ (C) .

- A. $\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} \cos x - \sin x \ln x$
 B. $\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} \cos x + \sin x \cdot \ln x$
 C. $\sec^2 x - \frac{1}{x} \cos x + \sin x \cdot \ln x$
 D. $\sec x \cdot \tan x - \frac{1}{x} \cos x + \sin x \cdot \ln x$

4、设 $I = \int \arctan x dx$ ，则 $I =$ (C) .

- A. $x \arctan x + \frac{1}{2}(x^2 + 1) + C$ B. $\frac{1}{1+x^2} + C$
 C. $x \arctan x - \ln \sqrt{x^2 + 1} + C$ D. $x \arctan x - \ln |x^2 + 1| + C$

5、若函数 $y = f(x)$ 有 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处微分 dy 是

(B) .

- A. 与 Δx 等价的无穷小;
- B. 与 Δx 同阶的无穷小, 但不是等价的无穷小;
- C. 比 Δx 高阶的无穷小;
- D. 比 Δx 低阶的无穷小.

6、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax)}{x}, & x \neq 0, \\ b, & x = 0, \end{cases}$ 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$, 则 a, b, A 之间的关系为

(A) .

- A. a, b 可取任意实数, $A = a$
- B. a, b 可取任意实数, $A = b$
- C. a 可取任意实数, 且 $a = b = A$
- D. a, b 可取任意实数, 而 A 仅取 $A = \ln a$

7、关于曲线 $y = x \ln x (0 < x < +\infty)$ 的凹凸性, 正确的判断是 (A) .

- A. 在 $(0, +\infty)$ 内曲线向上凹
- B. 在 $(0, +\infty)$ 内曲线向下凹
- C. 在 $(0, 1)$ 内曲线向上凹, 在 $(1, +\infty)$ 上曲线向下凹
- D. 在 $(0, 1)$ 内曲线向下凹, 在 $(1, +\infty)$ 上曲线向上凹

得分	
阅卷人	

二、 填空题: (每题 4 分, 共 6 小题 24 分)

8、设 $F(x) = \int_1^x \sqrt{1+t} dt$, 则 $F'(x) = \sqrt{1+x}$.

9、设 $y = 3 \sin x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则其反函数 $x = x(y)$ 的导数 $x'(y) = \frac{1}{\sqrt{9-y^2}}$.

10、微分 $d(x^2 + e^x + \ln 2) = (2x + e^x)dx$.

11、函数 $y = x \cdot 2^x$ 的极小值点是 $x = -\frac{1}{\ln 2}$

12 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\sin x$, 则 $\int x^2 f''(x) dx =$

$$-x^2 \sin x - 2x \cos x + 2 \sin x + c.$$

13、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{3x} - 1}{x^2} = \underline{6}.$

得分	
阅卷人	

三、计算题（每题 8 分共 6 小题，共 48 分）

14、 设 $\begin{cases} x = \sin^2 t + 1, \\ y = \tan^2 t, \end{cases}$ 确定了函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2 \tan t \sec^2 t}{2 \sin t \cos t} = \frac{1}{\cos^4 t} = \sec^4 t$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4 \sec^3 t \sec t \tan t}{2 \sin t \cos t} = 2 \sec^6 t$$

15、 计算积分 $\int_a^{\sqrt{3}a} \frac{a+x}{a^2+x^2} dx \ (a > 0).$

$$\begin{aligned} \int_a^{\sqrt{3}a} \frac{a}{a^2+x^2} dx + \int_a^{\sqrt{3}a} \frac{x}{a^2+x^2} dx &= a \cdot \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \Big|_a^{\sqrt{3}a} + \frac{1}{2} \ln(a^2+x^2) \Big|_a^{\sqrt{3}a} \\ &= \arctan \sqrt{3} - \arctan 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{4a^2}{2a^2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

16、 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2\end{aligned}$$

17、用定积分应用证明：圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 的面积 $s = \pi a^2$

$$\begin{aligned}s &= 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \stackrel{x=a \sin t}{=} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \cdot a \cos t dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t dt = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \pi a^2\end{aligned}$$

18、求微分方程 $\frac{dy}{dx} - y \tan x = \sec x, y|_{x=0} = 0$ 满足初始条件的特解。

解： $p(x) = -\tan x, q(x) = \sec x$;

$$\begin{aligned}\text{通解: } y &= e^{-\int p(x) dx} [\int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + c] \\ &= e^{\int \tan x dx} [\int \sec x \cdot e^{\int -\tan x dx} dx + c] \\ &= e^{-\ln \cos x} [\int \sec x \cdot e^{\ln \cos x} dx + c] \\ &= \frac{1}{\cos x} [\int \sec x \cdot \cos x dx + c] = \frac{1}{\cos x} (x + c) \\ y|_{x=0} &= 0, c = 0, \text{特解: } y = \frac{x}{\cos x}\end{aligned}$$

19、求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = xe^x$ 的通解。

解：特征方程： $r^2 - 3r + 2 = 0, r_1 = 1, r_2 = 2$

对应齐次方程通解： $Y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

$f(x) = e^x \cdot x, \lambda = 1$ (单根), $k = 1, y^* = xe^x(ax + b) = e^x(ax^2 + bx)$

$y''' = e^x(ax^2 + bx + 2ax + b), y''' = e^x(ax^2 + bx + 2ax + b + 2ax + b + 2a)$

代入： $e^x(ax^2 + bx + 2ax + b + 2ax + b + 2a) - 3e^x(ax^2 + bx + 2ax + b) + 2e^x(ax^2 + bx) = xe^x$
 $-2ax + 2a - b = x,$

$a = -\frac{1}{2}, b = -1, y^* = e^x(-\frac{1}{2}x^2 - x)$

通解：

$y = Y + y^* = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x(-\frac{1}{2}x^2 - x)$

方法2: $Y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$, 令 $y^* = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{2x}$

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{2x} = 0 \\ c_1'(x)(e^x)' + c_2'(x)(e^{2x})' = xe^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -x \\ c_2'(x) = xe^{-x} \end{cases}$$

$c_1(x) = -\frac{x^2}{2}, c_2(x) = -xe^{-x} - e^{-x}, y^* = e^x(-\frac{x^2}{2} - x - 1)$